SCUOLA E DIDATTICA

Quindicinale di problemi e orientamenti per la scuola media

Direttore **Aldo Agazzi**

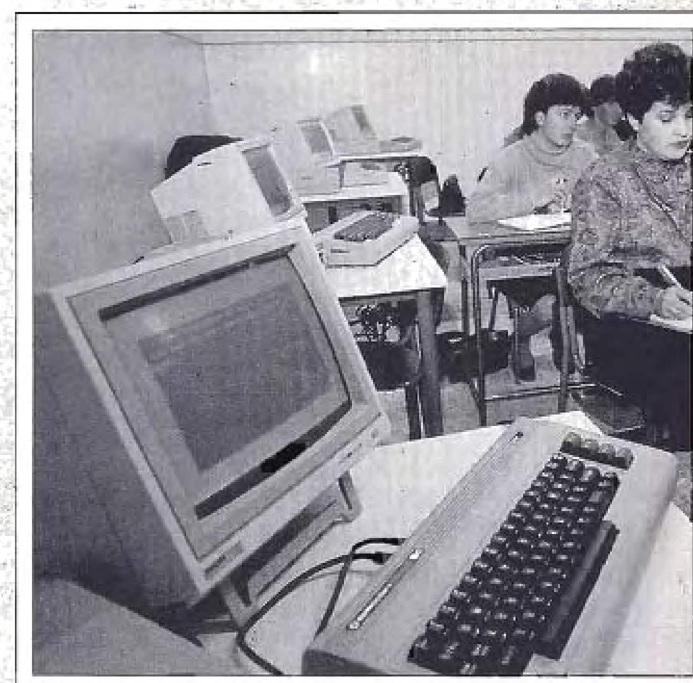
Editrice La Scuola - 25186 Brescia

Estratto dal n. 5
del 15-11-88

inserti
scuola e DIDATTICA

Computer e insegnamento della matematica

Carlo Felice Manara



Inserto redazionale a «Scuola e Didattica» n. 5, 15 novembre 1988, anno XXXIV, Editrice La Scuola - Brescia.

Computer e insegnamento della matematica

Carlo Felice Manara

L'introduzione di elementi di informatica nella scuola media, oltre che in quella elementare, deve passare attraverso il filtro attento e, quanto possibile, disincantato del docente. Questa tesi, peraltro da noi sempre sostenuta, si accompagna con la necessità di approfondire le proprie conoscenze sia in campo informatico, sia in campo matematico.
Se da un lato, purtroppo, le conoscenze superficiali portano erroneamente ad associare l'«informatica» al semplice «uso del computer», d'altro canto, con l'Autore dell'inserto che qui proponiamo, «non intendiamo accettare che la gestione dell'informazione sia l'attività più importante dell'uomo e che il compito fondamentale della scuola sia quello di addestrare a gestire delle informazioni».
La conoscenza investe problemi più ampi della semplice gestione di informazioni. Tuttavia, volendo considerare nello specifico il problema di imparare ed insegnare a programmare in campo matematico, la realizzazione di semplici programmi con l'uso dell'elaboratore richiede comunque approfonditi esami critici di procedure. In ogni caso, cogliamo dall'Autore l'esortazione ad usare ed a far usare soprattutto la ragione, senza trascurare di coltivare fantasia e creatività, a vagliare con spirito critico i risultati, a programmare con competenza e serietà professionale senza gettare tempo prezioso per seguire mode effimere.

I - L'informatica e la scuola

1 - Non crediamo che occorrano parole per descrivere l'effetto ed il significato della diffusione dei mezzi di calcolo nella nostra società: le cose stanno sotto i nostri occhi; e se per caso vi fosse qualcuno incapace di osservarle, si incaricherebbero la stampa e la pubblicità di sottoporle alla nostra attenzione.
Naturalmente questa, che viene chiamata una rivoluzione culturale da parte degli esaltatori entusiasti, ha investito anche la scuola, provocando delle vicende che ancora oggi sono in pieno svolgimento. Infatti sono stati creati dei corsi universitari di informatica, e le loro aule sono state immediatamente affollate da studenti ansiosi di imparare la nuova dottrina. Inoltre la pubblicità martellante (e non sappiamo fino a qual punto disinteressata) di certi settori industriali ben identificabili ha convinto il grosso pubblico che «...chi non saprà dialogare con il computer sarà l'analfabeta del futuro»; naturalmente nessun genitore desidera che il proprio figlio sia analfabeta: lo si manda a scuola proprio perché non rimanga tale. Di conseguenza le famiglie si sono messe a reclamare a gran voce dei corsi di informatica nelle scuole medie; la richiesta è stata tanto più urgente ed esigente quanto più vaghe e nebulose erano le idee nelle teste dei richiedenti. Quindi l'informatica ed i suoi metodi hanno fatto la loro trionfante entrata nei programmi ministeriali; si è stilato un piano nazionale per l'introduzione dell'informatica nelle scuole e le bozze dei nuovi programmi del biennio della scuola secondaria superiore hanno un titolo che parla esplicitamente di matematica, informatica e fisica.
Corrispondentemente, le mode pegagogiche si sono uniformate alle parole d'ordine vincenti: si potrebbe dire che è tramontato ormai il mito della spontaneità e della creatività, che aveva trionfato negli anni attorno al '68, tanto esaltato; a quel tempo abbiamo udito da più parti proclamare il motto «l'imagination au pouvoir», parola d'ordine a cui corrispondeva simmetricamente l'altra che proclamava: «è vietato vietare». Allora i pedagogisti esaltavano la creatività, la spontaneità, la libertà assoluta dell'alunno; oggi è invece di moda il progetto di costruire il «bambino della ragione», e quindi i pedagogisti (forse gli stessi di prima) fanno la pubblicità ai programmi di addestramento, ai metodi che dovrebbero costruire a macchina, con procedure infallibili, i nuovi geni del futuro, capaci di dialogare con le macchine qualificate «intelligenti». Non

viene garantito che questi nuovi geni sappiano dialogare anche con gli uomini, oppure sappiano manifestare un minimo di creatività che li faccia uscire dai sentieri già tracciati dei programmi e delle procedure stabilite; ma forse queste richieste sono considerate superflue da coloro che sono intenti a seguire affannosamente e pedissequamente le mode che ci vengono da oltre oceano.

Abbiamo già esposto in altre sedi il nostro pensiero a proposito di questi atteggiamenti pedagogici; ci limitiamo a ripetere qui che non soltanto essi non ci convincono, ma che presso alcuni sfegatati entusiasti della informatizzazione e della computerizzazione assumono degli aspetti ridicoli, per non dire addirittura grotteschi. Ammettiamo in alcuni fervidi apostoli un certo ammontare di ingenua buona fede, ma abbiamo qualche fondato sospetto che il loro entusiasmo sia basato sulla confusione tra informazione e conoscenza, tra addestramento ed insegnamento.

Per parte nostra, ripetiamo qui che non intendiamo accettare che la gestione della informazione sia l'attività più importante dell'uomo e che il compito fondamentale della scuola sia quello di addestrare a gestire delle informazioni. A nostro parere infatti la conoscenza è qualche cosa di più del semplice accumulo delle informazioni, e l'insegnamento deve mirare a qualche cosa di più dell'addestramento a gestire le informazioni. Ma non intendiamo iniziare qui una analisi che abbiamo già condotta, come abbiamo detto, in altri luoghi. Vogliamo soltanto aggiungere che, a nostro parere, la formazione del giovane non può limitarsi all'addestramento «alla ragione», perché l'intelligenza non si riduce al momento deduttivo ed analitico; e se anche così fosse, pensiamo ulteriormente che la formazione all'analisi ed alla deduzione non passi necessariamente per le procedure che vengono reclamizzate dall'informatica rampante di moda. Siamo ben consci del fatto che diciamo delle cose del tutto banali, alla portata di un qualunque cittadino dotato del minimo buon senso. Ma non crediamo inutile ripetere anche delle banalità perché ci è capitato di udire dei personaggi benintenzionati i quali hanno dichiarato e scritto che i nostri ragazzi sono molto più intelligenti dei loro padri perché... li battono regolarmente a quei divertimenti diffusi che vengono indicati col termine barbaro e straniero di «video-games».

È chiaro che se qualcuno dice seriamente queste cose è fatica sprecata cercare di spiegargli ciò che chiunque capisce senza bisogno di spiegazioni: e cioè che la prontezza di riflessi, la plasticità del sistema nervoso nell'apprendere nuovi comportamenti, la destrezza di manovra non sono di per sé dei segni di intelligenza. Noi infatti continuiamo a credere che questa sia la capacità di conoscere le cause delle cose, di vedere e comprendere le spiegazioni dei fenomeni che osserviamo.

Pertanto soltanto la riflessione e la comprensione, e non la prontezza e la destrezza, innata o acquisita, sono gli strumenti per sviluppare l'intelligenza. Ma pensiamo anche che sia molto imprudente e superficiale pretendere di codificare la riflessione, la ricerca delle ragioni profonde delle cose con procedure noiose e spesso inutili come il tracciamento di diagrammi di flusso. Pertanto, per rimanere nell'argomento ora toccato, abbiamo il fondato sospetto che l'imporre l'insegnamento e l'impiego dei diagrammi di flusso anche nelle scuole elementari presenti degli aspetti legittimamente contestabili.

2 - Abbiamo esposto brevemente il nostro parere su questi argomenti per chiarezza ed anche perché sentiamo il dovere di coscienza di non aggregarci al coro osannante di chi si attende miracoli dall'introduzione delle macchine nella scuola; ma non intendiamo proseguire in questa direzione, perché vorremmo concentrare la nostra attenzione sui rapporti tra questa introduzione e l'insegnamento della matematica.

Infatti si potrebbe dire che le attese più numerose e le richieste più insistenti si verifichino proprio in questa direzione. Ci è capitato per esempio di udire una insegnante di lettere di Liceo classico criticare la collega di matematica per il fatto che essa non avesse cambiato in nulla il proprio insegnamento di questa materia per tener conto della esistenza del piano di informatica nella scuola; ci pare di poter asserire in tranquilla coscienza che la signora che elevava queste critiche conosceva ben poco di informatica ed ancora meno di matematica. Ma queste critiche ridicole, enunciate a casaccio, dimostrano quanta presa abbiano certe parole d'ordine su certe menti, anche preparate e serie. Si sono infatti ingenerate delle aspettative miracolistiche, quasi che l'addestramento all'impiego delle macchine straordinarie possa sostituire la fatica di pensare, di analizzare pazientemente, di appropriarsi vitalmente delle strutture delle teorie e delle ragioni profonde delle cose. Purtroppo questi atteggiamenti sono confortati anche da quelli dell'autorità: infatti per esempio nella circolare che proponeva nuovi programmi di matematica ed informatica si dice chiaramente che lo scopo dell'insegnamento della matematica è quello di risolvere problemi; e purtroppo molta pubblicità di case editrici e venditrici di programmi di calcolatori inducono in certe menti non troppo ferrate l'idea che il momento principale della soluzione di un problema sia quello che consiste nella scelta del dischetto corrispondente e nella risposta alle domande, già codificate, che compaiono sul video. In questo ordine di idee per esempio la geometria, che è sempre stata una palestra insostituibile di astrazione, intuizione, fantasia creatrice e rigore di deduzione, viene umiliata ad un elenco di formule di geometria analitica, e la deduzione viene ridotta ad una esecuzione meccanica di calcoli. Di conseguenza gli esercizi perdono ogni interesse ed ogni valore formativo per un allievo che abbia un minimo di intelligenza e di curiosità intellettuale.

Nelle pagine che seguono cercheremo di presentare alcuni spunti didattici, dai quali l'insegnante accorto, colto e volenteroso potrebbe prendere l'avvio per utilizzare i nuovi strumenti di cui possiamo disporre nel modo più ragionevole ed efficace.

II - Il calcolo numerico

1 - In una visione approssimativa e rudimentale, ma diffusa forse più dell'accettabile, la matematica è ancora oggi considerata «la scienza della quantità», oppure anche «la scienza dei numeri». È facile avvedersi che le cose non stanno esattamente in questo modo, e che la critica degli ultimi secoli ha presentato la matematica come una scienza caratterizzata dalle sue procedure e dai suoi metodi piuttosto che dai suoi contenuti. Tuttavia la concezione rudimentale ed approssimativa di cui si diceva è abbastanza giustificata ed ha ancora oggi una sua motivazione. Infatti, anche a chi ha frequentato soltanto le scuole medie può apparire chiaro, dopo una breve riflessione, che per esempio l'algebra non studia direttamente i numeri, ma piuttosto le proprietà formali delle operazioni sui numeri; ma rimane anche vero che l'insegnamento della matematica risulterebbe astratto e puramente formale se non mirasse, almeno in linea di principio, al calcolo numerico. Se pensiamo per esempio alle funzioni elementari che vengono studiate nella scuola media, ci avvediamo che questi concetti formalizzano certe corrispondenze tra determinati insiemi di numeri, e possono anche essere guardati come delle istruzioni che dirigono i calcoli numerici a certi fini.

Inoltre i numeri ci forniscono gli strumenti simbolici per rappresentare certe realtà, e per conoscerne le leggi. I numeri naturali costituiscono infatti il primo incon-

tro del giovane con gli strumenti matematici, e gli permettono di dominare gli insiemi finiti e le operazioni su di essi. I numeri razionali introducono il giovane studente nel mondo delle misure, e gli permettono quindi di dominare le grandezze, cioè di compiere il primo passo verso la conoscenza fisico-matematica del mondo materiale che ci circonda. Pertanto la conoscenza e la utilizzazione dei numeri costituiscono i primi passi della educazione matematica e scientifica del giovane; ma anche la realizzazione concreta delle strutture formali che studierà nel seguito della sua carriera scolastica trova nel calcolo numerico, cioè nella manovra delle misure di grandezze concrete, il controllo sulla realtà e la verifica del contenuto conoscitivo della matematica che egli è tenuto a studiare.
Segue di qui che la manovra del calcolo numerico dovrebbe essere considerata come un elemento fondamentale dell'educazione matematica.
Ma occorre anche ricordare che spesso il calcolo numerico risulta noioso ed ostico; e pertanto non sempre gli insegnanti dedicano ad esso il tempo e la fatica che meriterebbe, per evitare che l'insegnamento della matematica si riduca ad una memorizzazione inutile e vuota di formule senza molta presa sulla realtà che il giovane manipola. Avviene infatti spesso che la memorizzazione dei risultati delle moltiplicazioni dei numeri di una cifra (le cosiddette «tabelline» o, come si diceva una volta, la «tavola pitagorica») risulti sgradita e susciti repulsione e fastidio. Ne consegue che spesso gli esercizi sui calcoli numerici provocano noia e addirittura distolgono dallo studio certi alunni che potrebbero riuscire molto bene nelle materie scientifiche.
In questo ordine di idee è chiaro che la possibilità di utilizzare strumenti molto potenti e molto diffusi potrà sollevare insegnanti e studenti da una fatica mentale che rischia di allontanare dalla matematica alcune delle intelligenze che spesso posseggono delle precise disposizioni scientifiche, ma sono annoiate dalla pratica dell'addestramento dei calcoli.
È noto che le piccole calcolatrici tascabili sono vendute ormai ad un prezzo irrisorio, sono addirittura considerate dei giocattoli ed alcune sono incluse in certe confezioni e regalate dalle ditte, come una volta si regalavano le figurine o i buoni-premio. Sarebbe quindi vano pensare di proibire l'impiego di questi strumenti agli allievi: essi penserebbero ad una imposizione del tutto arbitraria, e la giudicherebbero come una ennesima prova del fatto che la scuola si distacca sempre di più dalla vita reale. Pensiamo invece che la scuola debba assumere una posizione attiva nei riguardi di questa diffusione capillare di nuovi mezzi di calcolo; ed anzi possa avvalersi di questi per poter dare una immagine della matematica che sia più moderna ed aderente alla realtà rispetto a quella che viene usualmente data, e possa così ampliare l'orizzonte mentale degli alunni.

2 - Quando parliamo di una immagine della matematica più moderna ed aderente alla realtà ci ricolleghiamo a ciò che abbiamo detto poco fa, osservando che la matematica non è qualificata dai suoi contenuti, ma piuttosto dalle sue procedure; ed in queste procedure noi pensiamo che si possa annoverare anche il calcolo numerico, che porta lo strumento matematico ad immediato contatto con quella realtà che il linguaggio matematico cerca di rappresentare. Infatti presso molte persone, anche colte, la matematica si presenta come un coacervo di formule astratte, che rimangono nella memoria di molti soggetti dopo la scuola media come dei relitti inutili e morti.
Per spiegare meglio il nostro pensiero faremo riferimento ad un esempio concreto: si pensi per esempio ad un rettangolo, e si indichino con a e b le misure dei suoi lati, misure eseguite con la scelta di una determinata unità, ed espresse con numeri. Indichiamo con d la misura della diagonale del rettangolo; il teorema di Pitagora dimostra che tra le misure considerate sussiste la relazione nota:

$$d^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Nella maggioranza dei casi, si pensa che la formula (1) esaurisca la questione di conoscere la misura della diagonale quando si conoscono le misure dei lati. Tuttavia questa convinzione non è pienamente giustificata, quando si vogliono ottenere delle informazioni concrete che ci permettano di dirigere razionalmente il nostro comportamento nei riguardi della realtà fisica sulla quale operiamo.
Infatti i numeri a, b e d, che abbiamo nominato, sono in teoria dei numeri reali; con le abituali convenzioni per rappresentare questi numeri, essi sono rappresentati da frazioni decimali, e quindi da allineamenti di cifre che sono potenzialmente infiniti. Ma la pratica dei calcoli esclude ovviamente che si possa operare su allineamenti infiniti: in particolare gli strumenti che possediamo ed ai quali facciamo riferimento, manovrano soltanto un numero di cifre che abitualmente è 8. Di conseguenza quando occorre tradurre nella pratica la formula (1), occorre tener conto del fatto che il sostituire degli allineamenti finiti a quelli potenzialmente infiniti che dovrebbero rappresentare i numeri reali comporta degli errori, che occorre conoscere e saper dominare. A questo scopo saranno dedicate le pagine che seguono, ma intendiamo prima giustificare questo nostro lavoro, anche per ribadire la concezione della matematica come scienza di procedure di cui abbiamo detto sopra.
Infatti, quando si sia accettata questa concezione, è ragionevole porsi una domanda: queste procedure a quale scopo sono rivolte? A questo proposito vorremmo ricordare ciò che affermava il grande matematico italiano Giuseppe Peano, dicendo che «...la matematica è una logica perfezionata». Traducendo il pensiero di Peano con altre parole, vorremmo dire che lo scopo delle procedure della matematica, così come del resto lo scopo della logica, è quello di dare delle informazioni esatte.
Nello stesso ordine di idee si può pensare anche che la soluzione di un problema matematico miri a dare, con mezzi razionali, più informazioni di quelle che si avevano all'inizio; o, meglio, miri a rendere esplicite ed applicabili nella pratica le informazioni che sono implicite nell'enunciato del problema considerato, beninteso qualora esso sia ben posto.
Così per esempio, se si tratta di un problema di geometria classica (euclidea), che richiede la posizione di certi elementi geometrici (punti, o rette, o altre figure) che debbono soddisfare a determinate richieste, la soluzione consiste nell'indicare le costruzioni geometriche concrete che conducono alla determinazione degli elementi cercati.
Se cerchiamo di applicare queste considerazioni al problema di determinare la misura della diagonale del rettangolo, quando si conoscano le misure dei lati, siamo portati, nella pratica dei calcoli, ad approfondire il significato delle informazioni che, a livello teorico, ci sono date dalla formula (1).
In particolare se le informazioni che si hanno sono desunte da operazioni pratiche di misura, le risposte dovranno anche essere commisurate alle operazioni pratiche da eseguire per controllare la loro validità o per utilizzare le informazioni stesse ai fini teorici e pratici. Per esempio, se le misure dei lati del rettangolo sono date in metri, con ordine di approssimazione del centimetro, pare ovvio che anche le risposte siano date con quell'ordine di approssimazione, perché le operazioni materiali di misura, nel caso concreto, non possono aver senso per una precisione ulteriore. Risulterebbe quindi inutile fornire 6 cifre decimali della misu-

ra della diagonale, perché, nel caso in esame, non avrebbe senso alcuna misura che pretenda di raggiungere una precisione superiore; pertanto è lecito concludere che quelle 6 cifre decimali non hanno alcun significato reale di informazione sensata. La cosa del resto è presentabile sotto altra forma dicendo che la matematica insegna a dedurre, non ad inventare le informazioni: se i dati hanno un certo margine di errore; non è possibile che la manipolazione matematica faccia diminuire il margine stesso; al massimo lo manterrà dello stesso ordine di grandezza, ma in generale lo farà aumentare.

3 - Ritorneremo nel seguito su questi argomenti, i quali fanno parte degli spunti didattici che cercheremo di presentare ai nostri lettori. Riprendendo qui il discorso sulla rappresentazione dei numeri reali ci riattacchiamo a ciò che abbiamo già detto, osservando che un numero reale è abitualmente rappresentato da un allineamento potenzialmente infinito di simboli; siano essi le cifre della rappresentazione decimale, oppure i quozienti parziali di una frazione continua, oppure altri strumenti pensabili per rappresentare un numero reale. Ora nella pratica è possibile manovrare soltanto dei simboli costituiti da segni in numero finito; ne consegue che un numero reale a dovrebbe in ogni caso essere rappresentato con una coppia di disuguaglianze:

(2) $$a' < a < a'',$$

dove i numeri a' ed a'' sono numeri razionali. Nei casi più comuni, quando questi sono rappresentati in forma decimale, i numeri stessi sono assegnati con un certo numero di cifre dopo il punto decimale.
Come è noto, i numeri razionali a' ed a'' sono spesso chiamati rispettivamente valori approssimati per difetto e per eccesso del numero reale a su cui si vuole calcolare.
È pure noto che spesso i valori per difetto e per eccesso sono scelti in modo tale che, dato per esempio un valore per difetto, si può costruire un valore per eccesso con un'operazione molto semplice; questa consiste nell'aggiungere al valore per difetto considerato una unità dell'ultimo ordine decimale che si è scritto.
Così, per esempio, sapendo che il razionale 2,23606 è un valore approssimato per difetto del numero reale radice positiva dell'equazione algebrica:

(3) $$x^2 - 5 = 0,$$

un valore approssimato per eccesso della stessa radice sarà dato dal razionale 2,23607, e si potrà quindi scrivere:

(4) $$2{,}23606 < \sqrt{5} < 2{,}23607.$$

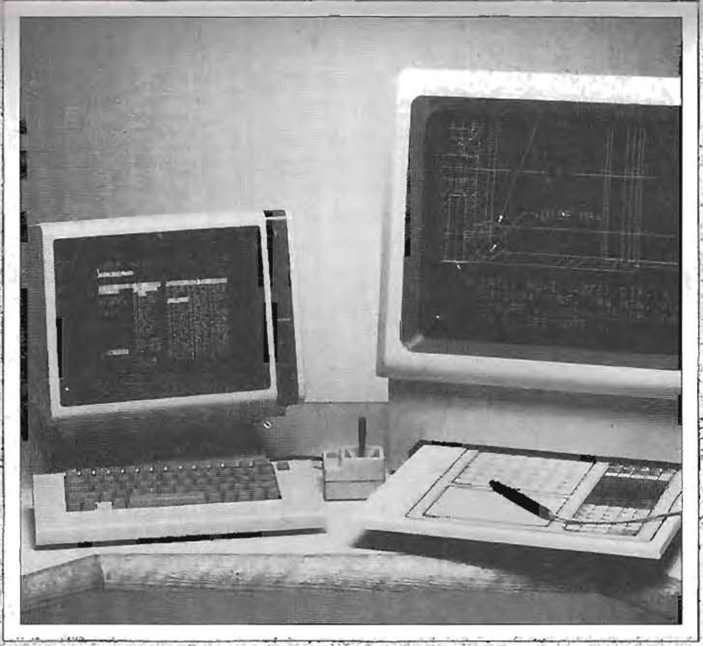
Spesso le tavole numeriche e le macchine calcolatrici forniscono dei valori approssimati per difetto dei numeri reali e dei risultati delle operazioni, qualora tali risultati abbiano un numero di cifre che supera la portata della macchina stessa; tali valori sono anche detti «valori troncati» dei numeri in questione. Spesso invece le tavole numeriche e le macchine calcolatrici forniscono dei valori che vengono chiamati «arrotondati»: un valore cosiffatto si ottiene con la seguente operazione, che viene chiamata appunto «arrotondamento»: il numero decimale viene scritto come un valore troncato se la prima cifra decimale successiva a quella che si scrive è 0 oppure 1, 2, 3, 4: l'ultima cifra che si scrive viene aumentata di un'unità se la prima cifra decimale successiva è 5, 6, 7, 8, 9. Così per esempio un valore arrotondato con quattro cifre decimali di $\sqrt{5}$ è 2,2361, perché il valore troncato con quattro cifre decimali è 2,2360, ma la prima cifra successiva all'ultima che si scrive è un 6, come si può vedere dalle (4).

È interessante sapere se le tavole a cui si fa eventualmente riferimento, oppure le macchine, piccole o grandi, che si impiegano, riportano dei valori troncati oppure arrotondati dei numeri reali che interessano: infatti abbiamo detto che lo scopo del calcolo numerico è quello di dare delle informazioni esatte, nella misura del possibile, e quindi di conoscere gli errori e di dominarli. Assumendo il numero razionale a' come valore del numero reale a e definendo l'errore con la differenza $a - a'$, è chiaro che l'errore che si commette ha sempre il segno positivo, ed ha valore assoluto non superiore all'unità dell'ultimo ordine decimale scritto. Invece assumendo come valore del numero reale un valore arrotondato, l'errore che si commette può essere positivo o negativo; e questa circostanza rende spesso difficile il precisare le informazioni che si traggono dai calcoli. Tuttavia il valore assoluto dell'errore non supera la metà dell'unità dell'ordine dell'ultima cifra decimale scritta.
Qualche Autore di recenti libri di fisica addirittura avverte che un valore numerico con un certo numero di cifre decimali vuole significare una misura la quale può avere un valore appartenente ad un intervallo che si ottiene aumentando oppure diminuendo il numero scritto di una unità dell'ultimo ordine decimale presentato. Con ciò l'errore oltre a non avere un segno noto, non supera una unità dell'ultimo ordine decimale.
Con convenzioni di questo tipo possono accadere anche dei casi apparentemente paradossali: per esempio può avvenire che un piccolo calcolatore tascabile esegua la estrazione di radice presentando dei valori arrotondati del risultato. L'incauto operatore che poi elevi al quadrato tale risultato può riottenere, sempre per opera degli arrotondamenti, il numero di partenza e quindi può trarre da questi risultati la convinzione che per esempio la radice quadrata di 5 sia un numero razionale: infatti eseguendo il quadrato di un numero razionale, rappresentato da un allineamento decimale finito, si è ottenuto un intero!!

4 - Vedremo nel seguito con quali operazioni molto semplici si può accertare che il dispositivo con cui si lavora opera con valori troncati oppure con valori arrotondati. Qui vorremmo osservare che non sempre, nella pratica didattica e nei manuali, si insiste sul fatto che vi sono certi numeri che non possono essere rappresentati senza errore: invece molto spesso si possono vedere degli elenchi di **numeri fissi**, presentati come frazioni decimali esatte. Così capita di leggere che l'altezza del triangolo equilatero si ottiene moltiplicando il lato per il numero fisso 0,86602, e la lunghezza della circonferenza si ottiene moltiplicando il diametro per il numero fisso 3,14. Questo modo di presentare la matematica ed i calcoli ci pare poco opportuno; ed è proprio nostra intenzione cercare di avvalerci degli strumenti che oggi sono alla portata di tutti per aiutare i docenti ad introdurre una immagine più ragionevole della matematica.
Per questa ragione presentiamo qui alcune osservazioni, del tutto elementari, che ci aiuteranno tuttavia ad impostare gli spunti didattici di cui diremo nel seguito.
Come abbiamo visto, un numero reale a può essere presentato soltanto con una coppia di diseguaglianze, del tipo della (2), oppure, come abbiamo detto, con altre convenzioni, le quali dovrebbero in ogni caso permettere di determinare un limite superiore dell'errore che si commette assumendo un numero razionale come valore approssimato del numero reale in questione.
Supponiamo che sia dato un secondo numero reale b, con una analoga coppia di diseguaglianze:

(5) $$b' < b < b'',$$

essendo anche qui b' e b'' dei numeri razionali, per esempio rappresentati con allineamenti decimali finiti.



Nel seguito supporremo che si abbia, in ogni caso:

(6) $a' > 0, \quad b' > 0,$

cioè supporremo di dover lavorare con numeri reali assoluti.
Allora dalle (2) e (5) si ottiene:

(7) $a' + b' < a + b < a'' + b'';$

(8) $a' * b' < a * b < a'' * b''.$

Queste due ovvie formule permettono di determinare l'errore nelle operazioni di somma e di prodotto di due numeri. È noto che in qualche trattato queste operazioni vengono chiamate «dirette», mentre quelle di sottrazione e divisione vengono chiamate «inverse». Orbene, nelle ipotesi enunciate, e sotto la ulteriore ipotesi:

(9) $b'' < a',$

si ottiene anche la coppia di diseguaglianze:

(10) $a' - b'' < a - b < a'' - b';$

(11) $a'/b'' < a/b < a''/b',$

le quali permettono di determinare gli errori che si commettono con le operazioni inverse.
Abbiamo detto che le osservazioni esposte sono del tutto elementari; tuttavia è facile osservare che spesso esse non vengono tenute presenti; ne consegue che spesso si presentano come risultati di calcoli matematici certe informazioni che, nella migliore delle ipotesi, sono inutili, e spesso anche inattendibili.
Per giustificare ciò che affermiamo, prenderemo in considerazione alcuni esempi di procedure che si seguono spesso e che conducono ad informazioni di questo tipo.
Esempio 1 - Sia da calcolare la lunghezza della circonferenza circoscritta al quadrato di lato 1. Indichiamo con L la lunghezza della circonferenza; il suo diametro vale, come è noto, $\sqrt{2}$ in forza del teorema di Pitagora. Si supponga di poter disporre di una tavola o di una piccola calcolatrice tascabile, di quelle che hanno il tasto della radice quadrata, e di ottenere così il valore:

(12) $\sqrt{2} = 1,414213562.$

Una procedura che abbiamo visto seguita molte volte porta a moltiplicare il valore (12) per il fatidico «numero fisso» 3,14, ottenendo il valore:

(13) 4,440630584.

In base alle relazioni elementari che abbiamo ricordato poco sopra, è facile concludere che il valore (13) fornisce delle informazioni illusorie, anche se si presenta con 9 cifre decimali. Per verificare questa affermazione, indichiamo provvisoriamente qui con Pi la costante di Archimede, che fornisce il rapporto tra la circonferenza ed il diametro, e che viene di solito indicata con «pigreca». Si ha dunque:

(14) $3,14 < \mathrm{Pi} < 3,15,$

e, d'altra parte, in relazione con la (12) si ha anche,

(15) $1,414213562 < \sqrt{2} < 1,414213563.$

Ovviamente il valore (13) è stato ottenuto moltiplicando tra loro soltanto i valori per difetto nelle coppie di diseguaglianze (14) e (15). Il prodotto dei due valori per eccesso conduce al numero:

(16) 4,454772723.

Pertanto le sole informazioni che possiamo onestamente dare sono quelle che portano alla coppia di diseguaglianze:

(17) $4,440 < L < 4,455.$

Come si vede, siamo ben lontani dalla falsa precisione ostentata dal valore (13) con lo spiegamento di cifre decimali inutili, ed anzi fallaci, perché inducono a pensare ad una inesistente precisione dei calcoli. A questo proposito vorremmo ricordare ciò che affermava G. Peano, dicendo che il rigore matematico consiste nel dire soltanto delle cose vere; se accettiamo questa definizione di rigore, si ha che ovviamente la (13) non vi corrisponde. Effettivamente, eseguendo i calcoli con maggiore precisione, si ottiene per la lunghezza cercata il valore:

(18) 4,442882

con un errore minore di 10^{-6}. Questo risultato è d'accordo con le informazioni (17), e mostra quanto siano lontane dal vero le informazioni (13), che pure sono date con uno spiegamento di 9 cifre decimali.

Esempio 2 - Si supponga di dover utilizzare la relazione (1), che traduce il teorema di Pitagora, in un caso pratico. Sia per esempio da determinare la diagonale di un tavolo di legno, i cui lati hanno misure in metri date da:

(19) $a = 2{,}35\ m;\ b = 1{,}27\ m;$

l'applicazione della formula (1), senza ulteriori precauzioni, condurrebbe a dare la misura della diagonale d con il numero:

(20) $2{,}67126951\ m;$

è facile osservare che quasi tutte le cifre decimali non hanno alcun significato, perché le misure di partenza sono assegnate con un errore che non supera il *cm*, il che significa che nella pratica questa lunghezza è la minima che si può rilevare con gli strumenti di misura nel caso in esame; ne consegue che le informazioni date dalla (20) sono in gran parte inutili; ma si verifica facilmente che esse non sono attendibili: infatti le informazioni (19) significano che per i due lati del tavolo rettangolare valgono le seguenti limitazioni:

(21) $2{,}35 < a < 2{,}36, \quad 1{,}27 < b < 1{,}28.$

Tenendo conto di questo, se si applica la formula (1) prendendo i valori approssimati per eccesso delle misure, si trova che la misura della diagonale soddisfa alle diseguaglianze:

(22) $2{,}671\ m < d < 2{,}685\ m$

e si constata ancora una volta che le informazioni date dalla (20) sono ridondanti ed inesatte: e quindi non rispondono a quell'ideale di rigore di cui abbiamo detto.

III - I piccoli calcolatori tascabili

1 - Le considerazioni che abbiamo svolto nelle pagine precedenti costituiscono un avvio alla presentazione di spunti didattici per l'utilizzazione dei piccoli calcolatori tascabili, in modo da offrire un'immagine della matematica che sia un po' migliore di quella tradizionale. Noi pensiamo che questo scopo sia raggiungibile anche senza disporre di apparati molto potenti; anzi, paradossalmente, noi crediamo che le macchine poco potenti permettano un lavoro didattico per certi aspetti più efficace, perché costringono l'utente a progettare e ad eseguire tutte le operazioni ed i passaggi di calcolo che sono eseguiti automaticamente da un apparato potente: si ottiene così lo scopo di far acquisire al discente l'abitudine all'analisi di ogni passaggio logico e pratico, e di prendere coscienza delle strutture logiche su cui si fonda il linguaggio matematico. E d'altra parte anche gli apparecchi molto piccoli permettono un risparmio di pesante lavoro di calcolo, lavoro che, oltre ad affaticare e ad annoiare, distoglie spesso l'attenzione del discente dagli aspetti più strettamente concettuali della procedura matematica.
Incominceremo quindi con il richiamare degli spunti didattici per l'impiego dei piccoli calcolatori tascabili; apparati che nel seguito saranno richiamati, per brevità, con la sigla PCT.
Gli esemplari ed i tipi di PCT che sono in circolazione sono numerosissimi, ed il loro prezzo sta diminuendo rapidamente; abbiamo già detto che alcuni tipi sono addirittura regalati. Tuttavia è possibile distinguere almeno due livelli di questi piccoli apparecchi, livelli ai quali faremo riferimento nel seguito.
Al livello più basso, che chiameremo primo, potremmo porre quei piccoli apparecchi che presentano soltanto le seguenti possibilità: le quattro operazioni aritmetiche, l'estrazione di radice quadrata, una memoria, la possibilità di cambiamento di segno, spesso la possibilità di esprimere il risultato di un'operazione di divisione in termini di percentuali. Al secondo livello potremmo porre quegli apparecchi che, oltre ai servizi offerti dagli apparecchi precedenti, presentano anche le seguenti possibilità: il reciproco di un numero, i valori delle funzioni trigonometriche, dirette ed inverse, i valori delle funzioni logaritmo ed esponenziale, la possibilità di calcolare dei valori di espressioni contenenti delle parentesi; spesso esiste la possibilità di passare dalla misura degli angoli in gradi a quella in radianti, la possibilità di calcolare potenze con esponente qualunque (anche fratto), la possibilità di eseguire dei calcoli statistici (per esempio di calcolare la media aritmetica, o anche lo scarto medio quadratico) di un insieme di dati, la possibilità di calcolare alcune funzioni intere di numeri interi (disposizioni, permutazioni e combinazioni). Talvolta esiste più di una memoria, il che permette di eseguire dei calcoli con iterazione.
I PCT di questo tipo vengono spesso indicati nei cataloghi delle varie case costruttrici come «calcolatrici scientifiche». Come abbiamo detto, il loro prezzo sta diminuendo rapidamente, ed in generale si avvicina a quello di un grosso manuale scolastico o di un dizionario o un atlante.
Per gli scopi che ci interessano, è utile sapere se il PCT di cui si dispone, quale che sia il suo livello, opera su valori troncati oppure su valori arrotondati dei numeri. A tal fine si può eseguire il calcolo di un numero decimale periodico mediante la sua frazione generatrice: per esempio si consideri il numero decimale periodico:

(1) $0{,}666666666666....$

il quale ammette come frazione generatrice:

(2) $2/3.$

Eseguendo l'operazione indicata dalla (2), si dovrebbe riottenere una successione di cifre come quella data dalla (1); se il PCT lavora con valori troncati, il risultato sarà una espressione come la (1), troncata ad una certa cifra, dipendente dal numero di cifre che il PCT ospita nel suo visore; se invece il PCT lavora con valori arrotondati, all'ultimo posto a destra comparirà un 7, il quale deriva dall'arrotondamento dell'ultima cifra che viene presentata, secondo le convenzioni che abbiamo spiegato nel Cap. II. Vorremmo aggiungere che, eseguendo le elementari verifiche suggerite, l'insegnante avrà occasione di ribadire il significato delle informazioni che si ottengono. Infatti se il PCT lavora con valori troncati, moltiplicando il numero (1) per 3 non si ottiene 2: il che potrebbe portare qualche scolaro a pensare che la divisione non sia l'operazione inversa della moltiplicazione. In pratica si può ottenere, con un PCT di questo tipo:

$$1{,}9999999 \quad \text{oppure} \quad 1{,}9999998.$$

Nel primo caso ciò può significare che il PCT lavora con valori troncati, ma non mostra sul visore tutte le cifre che ottiene nel calcolo; nel secondo caso il calcolatore mostra sul visore tutte le cifre che ottiene dal calcolo.
Nel caso in cui il PCT lavori con valori arrotondati, si può ottenere come risultato della divisione di 2 per 3 il numero:

$$0{,}6666667,$$

ed eseguendo la moltiplicazione per 3 di questo numero si potrebbe ottenere 2. Il che potrebbe indurre ancora una volta qualche scolaro a pensare che il numero stesso sia il risultato «esatto» dell'operazione di divisione di 2 per 3.

2 - Pare inutile osservare qui che con un piccolo calcolatore tascabile, anche di primo livello, l'insegnante può seguire e fare eseguire i calcoli che abbiamo presentato nel Capitolo precedente, ed inventare a sua volta ulteriori esercizi di calcolo numerico. Come è chiaro, lo scopo di questi esercizi non è soltanto quello di trovare dei valori numerici, ma soprattutto quello di dominare lo strumento che si possiede, dando il giusto significato alle informazioni che se ne ottengono. Lo scopo finale è ovviamente quello di sfatare la concezione falsa che presenta la matematica come una specie di magia, il cui dominio è riservato a pochi privilegiati, e che ha la prerogativa della precisione assoluta ed indiscutibile. Invero la precisione matematica, come abbiamo già detto, non consiste nell'inventare delle informazioni in apparenza molto precise e che non hanno riferimento concreto, ma nel presentare soltanto le informazioni vere che si possono dedurre rigorosamente dai dati.
Nello stesso ordine di idee, vorremmo presentare qui altri spunti didattici, che ci paiono stimolanti perché escono dalla strada abitualmente battuta, che consiste nella utilizzazione di formule stabilite e spesso memorizzate ed utilizzate con poco senso critico.
Osserviamo anzitutto che le poche osservazioni di calcolo numerico presentate nel capitolo precedente possono essere confortate da esercizi pratici realizzabili anche con i PCT di primo livello. Ciò potrebbe costituire un primo avvio all'impiego di questi strumenti, che sarebbero altrimenti considerati da una parte come dei puri giocattoli e dall'altra come dei piccoli feticci, i cui responsi sono inappellabili, mentre invece spesso, come abbiamo cercato di far vedere, debbono essere utilizzati con conoscenza di causa. Come vedremo, è possibile utilizzare questi strumenti del tutto elementari anche per eseguire dei calcoli i cui risultati non appaiono esplicitamente nei tasti delle operazioni di cui essi sono capaci: per esempio, come vedremo, è possibile calcolare anche la radice cubica di un numero, con un procedimento molto facile e che ci pare istruttivo, nell'ordine di idee che stiamo esponendo.
Tuttavia gli spunti più interessanti si ottengono, come è comprensibile, con i PCT di secondo livello, che, come abbiamo detto, vengono presentati dai costruttori spesso come «calcolatrici scientifiche».
Cogliamo l'occasione per osservare che la presenza sul mercato di questi strumenti potrebbe permettere all'insegnante di sfrondare in modo radicale il capitolo della trigonometria; abbiamo avuto occasione di esprimere recentemente il nostro stupore nel dover constatare come ancora questo vetusto capitolo di geometria elementare occupi centinaia di pagine oppure sia addirittura argomento di appositi volumi, inutilmente poderosi.
È nostra opinione che la presenza di nuovi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione possa permetterci di potare al massimo questa ed altre branche dell'insegnamento classico della matematica nelle scuole secondarie. Noi pensiamo inoltre che questa potatura possa permettere ai discenti di appropriarsi con sicurezza dei concetti fondamentali della trigonometria, in modo tale da sapere utilizzare in modo sensato questa dottrina: infatti ci pare di poter dire che spesso, sotto la caterva di formule complicate, memorizzate senza entusiasmo e senza convinzione, i discenti dimenticavano ben volentieri la radice e la motivazione delle formule stesse, e si trovavano in imbarazzo quando dovevano applicarle nei problemi più elementari.

3 - Nell'ordine di idee in cui ci siamo posti vorremmo richiamare qui una procedura abitualmente chiamata «procedimento di iterazione»; come è noto la parola «iterazione» deriva dal termine latino che significa «ripetizione». In questo caso specifico la parola significa una ripetizione di calcoli che si svolge come segue: sia da risolvere un'equazione, che si possa scrivere nella forma:

$$(1) \qquad x = f(x),$$

essendo $f(x)$ una funzione di cui si sa calcolare il valore in corrispondenza ad un x che appartiene ad un opportuno insieme. Allora, quando la funzione $f(x)$ soddisfa a certe ipotesi di cui diremo, il calcolo di un valore approssimato della radice dell'equazione (1) potrebbe essere eseguito nel modo seguente:
si parta da un valore $x(0)$ che, per qualche buona ragione, si considera come un valore approssimato della radice cercata; si calcoli poi

$$(2) \qquad x(1) = f[x(0)],$$

poi

$$(3) \qquad x(2) = f[x(1)],$$

e così via, ponendo in generale:

$$(4) \qquad x(n+1) = f[x(n)].$$

Sotto certe condizioni, che esporremo in seguito sotto forma elementare geometrica, la successione:

$$(5) \qquad x(0),\ x(1),\ x(2),\ \ldots\ x(n),\ \ldots$$

converge alla radice cercata.
L'insegnante accorto e colto non lascerà passare l'occasione per osservare che anche le procedure memorizzate e codificate per il calcolo di certi irrazionali, per esempio per il calcolo della radice quadrata, si riducono sostanzialmente alla costruzione di certe successioni di valori approssimati, successioni che si ottengono con la ripetizione di opportuni tentativi, razionalmente predisposti.
Sia per esempio da risolvere l'equazione:

$$(6) \qquad x^3 - 47 = 0,$$

cioè sia da calcolare la radice cubica di 47, disponendo soltanto di un calcolatore di primo livello. Si può osservare che l'equazione (6) può essere scritta nella forma seguente:

$$(7) \qquad x = \sqrt{\sqrt{47 * x}};$$

partendo dal valore, ovviamente approssimato per eccesso:

(8) $$x(0) = 4$$

si ottiene senza difficoltà dopo 11 passaggi il valore:

(9) $$3{,}6088261 < x < 3{,}6088262.$$

Abbiamo voluto presentare questo esempio concreto anche per ribadire che il possesso di PCT può aiutare il docente ad uscire dal campo delle equazioni di II grado; come è noto, i programmi non si spingono al di là di queste, che potrebbero essere chiamate, in forma classica, le Colonne d'Ercole della matematica delle scuole medie superiori. Volendo azzardare una spiegazione di questa limitazione, potremmo forse supporre che la esistenza di una formula risolutiva, che viene regolarmente memorizzata spesso senza saperla giustificare, induce nella illusione che la soluzione così ottenuta abbia le caratteristiche di quella precisione che i profani attribuiscono ai calcoli matematici. Basta una breve riflessione per convincersi che la formula risolutiva contiene una radice quadrata, e quindi rimanda alla costruzione di una successione, quasi sempre potenzialmente infinita, di valori approssimati.
Spesso invece la soluzione numerica diretta di una equazione permette di fare a meno dell'applicazione della formula, fornendo delle informazioni che hanno il vantaggio di presentare direttamente gli intervalli nei quali la radice cercata è contenuta, cioè di fornire informazioni rigorose, nel senso di cui abbiamo detto.
Presentiamo qui un esempio di procedura di questo tipo su un esempio, che ci permetterà una illustrazione geometrica e fornirà la base per l'illustrazione delle condizioni di convergenza di cui abbiamo detto.
Sia da ricercare la radice positiva dell'equazione:

(10) $$x^2 + x - 1 = 0,$$

la quale, come è noto, traduce in forma algebrica il problema della ricerca della sezione aurea del segmento unitario.
L'equazione (10) può essere scritta nella forma seguente:

(11) $$x = 1/(x+1);$$

pertanto essa può essere interpretata come l'equazione che traduce algebricamente la ricerca del punto di ascissa positiva che è intersezione della retta di equazione:

(12) $$y = x$$

(bisettrice del primo e terzo quadrante), e della curva rappresentata dall'equazione:

(13) $$y = 1/(x+1),$$

(iperbole equilatera).
Come si verifica facilmente, la funzione (13) è decrescente *(cfr. fig. 1)*.
Si scelga ora un valore $x(0)$ approssimato per eccesso della radice in questione, facendo per esempio:

(14) $$x(0) = 1;$$

in corrispondenza la (13) fornirà il valore :

(15) $$y = 0{,}5$$

il quale, introdotto nella (12) darà il valore:

(16) $$x(1) = 0{,}5;$$

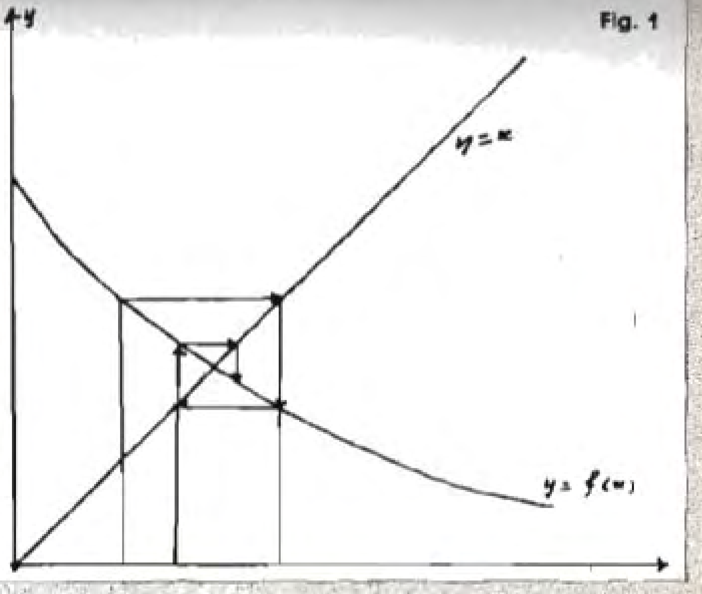


Fig. 1

questo, introdotto nella (13) fornirà il valore:

(17) $$y = 0.666666...$$

il quale, introdotto a sua volta nella (12) fornirà un secondo valore di x, e così via.
Si verifica facilmente che si ottiene così una successione di valori di x, i quali sono alternativamente approssimati per eccesso e per difetto del valore cercato; i primi (i valori per eccesso) formano una successione decrescente, i secondi formano una successione crescente; la figura annessa giustifica il nome di «convergenza a ragnatela» che viene dato spesso a questa procedura; essa presenta il vantaggio di fornire in ogni passo un intervallo di valori nel quale certamente è contenuta la radice cercata, cioè di non fornire delle informazioni falsamente precise e quindi fuorvianti. Così, dopo poco più di una dozzina di iterazioni, si ottiene la coppia di diseguaglianze:

(18) $$0{,}610338 < x < 0{,}610340$$

in cui non sono contenute informazioni ridondanti.
L'ispezione della figura mostra che la procedura è applicabile anche per risolvere una equazione numerica che possa essere messa nella forma (1), e che la successione dei valori di x che così si ottiene è convergente quando la curva rappresentata dalla equazione:

(19) $$y = f(x)$$

abbia, almeno in un opportuno intorno del punto di intersezione con la retta (12), una derivata (negativa) in valore assoluto maggiore di 1.
Una procedura analoga, con analoghe osservazioni, può essere applicata alla risoluzione dell'equazione (6). In questo caso l'equazione stessa può essere scritta nella forma:

(20) $$x = \sqrt{47/x}$$

e la convergenza a ragnatela permette di determinare, ad ogni stadio della procedura, la lunghezza dell'intervallo entro il quale la radice è contenuta.
Osserviamo infine che una procedura di questo tipo può essere applicata anche ad equazioni non algebriche, la cui soluzione quindi non può essere data con formule che utilizzino soltanto delle funzioni razionali e/o degli irrazionali algebrici.
Si consideri per esempio l'equazione seguente:

(21) $$x^x = 1000;$$

prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ottiene:

(22) $x * \log(x) = 3$

equazione che può essere scritta nella forma:

(23) $x = 3/\log(x)$.

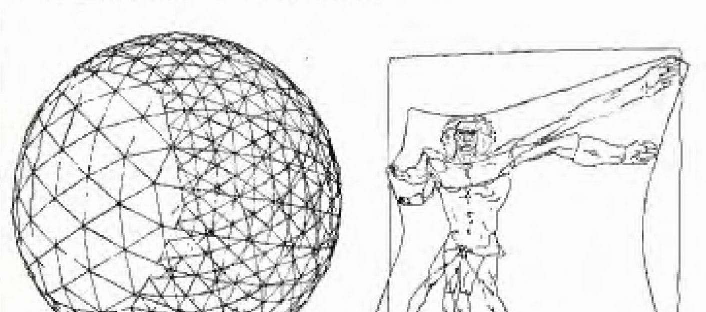
Si verifica che la radice reale positiva della (21) è compresa tra 4 e 5; applicando la procedura a ragnatela già utilizzata in precedenza, ed utilizzando un PCT scientifico, si può ottenere per la radice la coppia di disequazioni:

(24) $4{,}5555 < x < 4{,}5556$.

IV - Le macchine programmabili

1 - Nei capitoli precedenti abbiamo esposto qualche idea sulla possibilità di utilizzare, per i calcoli numerici, piccole macchine tascabili, che abbiamo indicato con la sigla convenzionale PCT. E ciò allo scopo di dare un'immagine corretta della matematica e delle sue procedure di soluzione dei problemi. È chiaro che il discorso non può limitarsi alle poche cose da noi esposte, perché esistono oggi sul mercato le macchine programmabili, e la moda della didattica oggi porta sempre più pesantemente a raccomandare e quasi ad imporre il loro impiego nella scuola. Si pone quindi il problema di saper utilizzare questi potenti strumenti con un atteggiamento che non sia puramente passivo, ma tenda a quell'ideale formativo che l'insegnamento della matematica dovrebbe raggiungere. Infatti il mercato si sta riempiendo sempre di più di offerte di programmi didattici; risulta quindi grande la tentazione di ridurre l'insegnamento della matematica ad una passiva applicazione delle procedure escogitate da altri e già codificate, favorendo così nei discenti l'accettazione supina del pensiero e dell'iniziativa altrui. Noi pensiamo invece che si possano utilizzare le macchine programmabili anche in modo diverso, accentuando l'aspetto formativo della loro utilizzazione.
Non è pensabile di poter presentare qui l'intera gamma delle possibilità offerte da questi nuovi strumenti; ci limiteremo quindi a ricordare le opportunità più importanti che ci sono offerte: per esempio quella di poter far eseguire alla macchina un grandissimo numero di calcoli in un tempo brevissimo, e di poter programmare la evoluzione di un calcolo sui risultati di un altro eseguito precedentemente.
Sfruttando queste due opportunità si possono compiere vari passi verso la formazione dei discenti ad una nuova visione della matematica. Anzitutto il poter compiere numerosissimi calcoli in brevissimo tempo permette di affrontare la soluzione completa di certi problemi che prima si potevano trattare soltanto in forma generica e simbolica: si pensi per esempio alla ricerca delle soluzioni di sistemi di equazioni; problema questo che conduce rapidamente a calcoli praticamente ineseguibili, non appena il numero delle equazioni superi qualche unità. Tuttavia occorre osservare che proprio queste grandi difficoltà hanno stimolato i matematici a sviluppare dei sistemi simbolici che permettessero l'analisi per così dire qualitativa dei problemi, e garantissero almeno la esistenza di soluzioni. Valga l'esempio della teoria dei sistemi di equazioni lineari, che si è sviluppata ed approfondita molto prima che i calcolatori elettronici permettessero la determinazione effettiva delle soluzioni. Spesso invece oggi si preferisce calcolare subito le soluzioni, rinunciando alla dimostrazione della loro esistenza, ed in generale all'analisi logica approfondita delle questioni. Il che porta spesso allo scadimento della qualità delle trattazioni, e potrebbe anche ingenerare l'abitudine di cercare la procedura di calcolo numerico di una soluzione senza preoccuparsi della giustificazione teorica.
D'altra parte l'impiego degli strumenti programmabili porta anche alla necessità di analizzare logicamente in modo rigoroso tutti i singoli passi che conducono al calcolo della soluzione di un problema, e quindi a prendere coscienza esplicita di tutte le operazioni mentali che noi spesso eseguiamo in modo quasi automatico. Questa necessità può offrire all'insegnante una buona occasione per stimolare i discenti alla riflessione; ed in questo ordine di idee noi pensiamo che l'impiego di apparati non molto perfezionati sia più utile di quello che si può svolgere con apparati molto raffinati e potenti, che risparmiano al programmatore molte analisi minute e molti passi di istruzioni; e ciò perché appunto pensiamo che, a questo stadio del lavoro didattico, l'utilità dell'impiego dei mezzi elettronici stia anche nella formazione dei discenti all'analisi di ogni momento del procedimento logico che conduce alla soluzione numerica di un problema.
Nelle pagine che seguono daremo qualche esempio di spunti didattici, insistendo sulle circostanze di cui abbiamo detto. Secondo ciò che abbiamo osservato poco sopra, supporremo che gli apparati su cui si lavora siano poco potenti, ed utilizzeremo il linguaggio di programmazione che viene indicato sotto la sigla BASIC, la quale fa esplicito riferimento al fatto che l'operatore sia un principiante: infatti tale sigla, nell'inglese rudimentale e primitivo che è ormai il gergo ufficiale dell'informatica, significa: «Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code». Frase che potrebbe essere tradotta con «Linguaggio universale di programmazione per principianti».
Inoltre, anche nella stesura dei programmi di cui daremo qualche esempio, non sfrutteremo tutte le possibilità offerte dal linguaggio, proprio per mettere in evidenza tutti i passi dell'analisi logica dei procedimenti. Ciò potrebbe anche servire all'insegnante per sottolineare il fatto che la sintassi di un linguaggio è in larga misura convenzionale; nel caso del linguaggio BASIC per esempio, l'impiego del simbolo «=» provoca qualche difficoltà nei principianti, perché il simbolo stesso non ha, in questo linguaggio, lo stesso significato che

Immagini realizzate al calcolatore.



na nella scrittura matematica abituale. Altre circostanze di questo genere saranno ricordate in occasione dei singoli programmi esemplificativi che presenteremo.

2 - In coerenza con ciò che abbiamo detto poco sopra, daremo ora qualche idea dei problemi la cui soluzione per mezzo di calcolatori programmabili può avere un valore didattico anche notevole.
Tratteremo anzitutto di problemi riguardanti numeri interi; infatti ci pare di poter dire che essi forniscono un notevole insieme di occasioni di trattare delle questioni di aritmetica elementare, che spesso non vengono neppure sfiorate nei corsi abituali di insegnamento, nei quali le operazioni dell'aritmetica elementare sono di solito date per note, come se non valesse la pena di riflettere ulteriormente su questi argomenti.
In un secondo tempo daremo qualche esempio di soluzione numerica di problemi relativamente nuovi, ed anche esempi di soluzione di problemi classici risolti con tecniche che sono rese possibili dalle proprietà dei calcolatori di cui possiamo disporre. Ciò potrebbe dare occasione di rimeditare sul significato della soluzione di un problema matematico, secondo le idee che abbiamo cercato di esporre nelle pagine precedenti.
Cercheremo di accompagnare i programmi con alcuni commenti, allo scopo di ribadire le idee che abbiamo esposto nelle pagine precedenti.

PROGRAMMA I - Massimo comun divisore di due interi naturali *M* ed *N*.

```
99 REM'MCD
100 INPUT "M=";M
110 INPUT "N=";N
115 U=M
116 V=N
120 P = M/N
130 Q = INT(P)
140 R = M - Q*N
150 IF R=0 GOTO 190
160 M=N
170 N=R
180 GOTO 120
190 PRINT "MCD("U","V")="N
200 END
```

COMMENTO. Il calcolo del massimo comun divisore di due numeri interi viene abitualmente presentato facendo ricorso alla decomposizione degli interi stessi in fattori primi. Potendo disporre di un apparato per l'esecuzione rapida di molti calcoli, risulta molto più semplice far ricorso al noto procedimento elementare delle divisioni successive, presentato da Euclide nei suoi «Elementi». Il programma è del tutto elementare, ma proprio per questa ragione ci darà occasione di riflettere sulle modalità d'impiego di questi apparati.

Istr. 100,110. Vengono introdotti i due numeri *M*, *N* di cui si vuole calcolare il massimo comun divisore.

Istr. 115,116. Gli stessi due numeri vengono introdotti anche in altre due memorie; infatti, durante il calcolo, nelle memorie *M* ed *N* saranno introdotti dei nuovi valori, ottenuti con calcoli precedenti.

Istr. 120,130,140. Viene calcolato il resto della divisione di *M* per *N*, facendo ricorso alla funzione INT(X) che dà la parte intera di un numero razionale. Molte macchine offrono la possibilità di avere immediatamente tale resto con un solo comando, ma qui abbiamo preferito presentare i singoli passi mediante i quali tale resto può essere calcolato.

Istr. 150. L'operatore logico «IF» (che, come è noto, in inglese significa «SE») permette di comandare, come si è detto, i calcoli successivi a seconda dei risultati di quelli che precedono. In questo caso, se il resto *R* della divisione è zero, si rimanda alla fine dell'operazione con il comando «GOTO», seguito dal numero dell'istruzione a cui si rimanda.

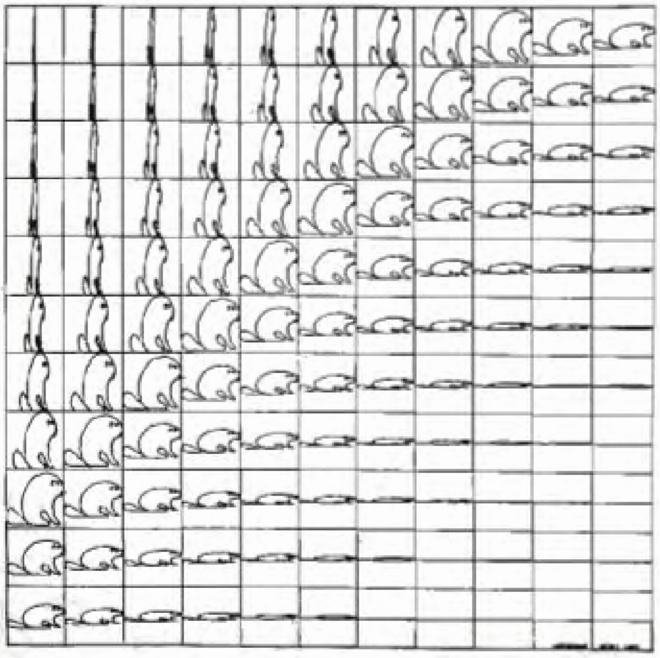
Istr. 160,170. Se non si verifica l'ipotesi precedente, cioè se il resto della divisione non è zero, allora il divisore precedente (*N*) viene messo al posto del dividendo, ed il resto *R* viene messo al posto del divisore. Questa assegnazione viene fatta con l'utilizzazione del simbolo «=» il quale, in questo contesto, non ha il significato che riceve nel resto della letteratura matematica: precisamente qui la frase scritta «*M*=*N*» indica l'ordine di introdurre il numero *N* nella memoria che prima conteneva il numero *M*, analogamente la frase «*N*=*R*» ordina di mettere il numero *R* nella memoria che prima conteneva *N*.
Fatte queste sostituzioni, l'istruzione 180 fa ripetere l'operazione di divisione con i nuovi operandi.

1) Variazioni, di Ronald Resh.

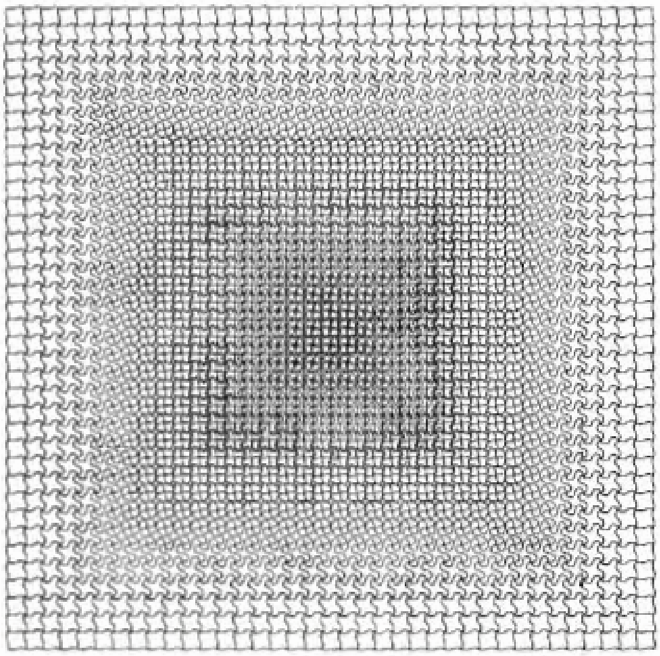
2) Uomo vitruviano di Leonardo da Vinci. Trasformazioni di Charles Csuri.

3) Variazione, trasformazione: castori, di Leslie Mezei.

4) Variazione, trasformazione, di John Roy



3



4

PROGRAMMA II - Soluzione di un'equazione di analisi indeterminata di primo grado.

```
10 REM' INDET A*X = 1+B*Y
20 INPUT "A=";A
30 INPUT "B=";B
40 M=A
50 N=B
60 GOSUB 200
70 IF Z>1 GOTO 160
80 Y=1
90 C=1+B*Y
100 D=C/A
110 E=INT(D)
120 F=C-A*E
130 IF F=0 GOTO 180
140 Y=Y+1
150 GOTO 90
160 PRINT "IMPOSSIBILE"
170 GOTO 190
180 PRINT "X="E, "Y="Y
190 END
200 P = M/N
210 Q = INT(P)
220 R = M - Q*N
230 IF R=0 GOTO 270
240 M=N
250 N=R
260 GOTO 200
270 Z=N
280 RETURN
```

COMMENTO. È data l'equazione:

(1) $A * X = 1 + B * Y$

nella quale A e B sono interi, e si vuole trovare almeno una sua soluzione con numeri X ed Y pure interi. Questo problema viene spesso indicato come «problema di analisi indeterminata di primo grado», e fu trattato metodicamente da L. Eulero.
Si verifica immediatamente che i coefficienti A e B debbono essere primi tra loro, cioè che si deve avere:

(2) $MCD(A,B) = 1$.

Si dimostra poi che la condizione (2) è anche sufficiente perché esista almeno una soluzione; inoltre se una soluzione esiste, ne esistono infinite: si osserva infatti che se due interi X ed Y soddisfano la (1), allora si ha anche, quale che sia l'intero K:

(3) $A * (X + K * B) = 1 + B * (Y + K * A)$.

Una soluzione della (1), nella ipotesi (2), può essere cercata con vari procedimenti. Qui si dà per noto che la soluzione esiste, e la si cerca dando alla incognita Y dei valori interi crescenti fino a che si trova al secondo membro della (1) un numero che è multiplo di A.
Istr. 20,30. Si introducono i coefficienti della (1).
Istr. 40,50. Tali coefficienti vengono introdotti anche nelle memorie M ed N, per poter sfruttare il programma I, allo scopo di verificare se la condizione necessaria (2) è soddisfatta.
Istr. 60. Questa istruzione rimanda ad un sottoprogramma, che è scritto dopo la fine del programma presente, cioè dopo l'istruzione 190. Un sottoprogramma cosiffatto viene abitualmente chiamato «subroutine» nel gergo informatico di cui si diceva.
Si verifica che le istruzioni da 200 a 260 del sottoprogramma coincidono con quelle da 120 a 180 del Programma I, ovviamente a meno dei numeri che contraddistinguono le istruzioni stesse.
Istr. 270. Il MCD trovato viene indicato con Z, e verrà utilizzato nella istruzione 70 per determinare la possibilità o meno della prosecuzione del calcolo.
Istr. 70. Se il MCD trovato nel sottoprogramma è diverso da 1, cioè se i due coefficienti A e B non sono primi tra loro, si rimanda all'annuncio che l'equazione data non è risolubile in numeri interi, annuncio che viene dato con la istruzione 160. Altrimenti si esplorano, come si è detto, tutti i numeri che compaiono al secondo membro della (1) per valori crescenti di Y, a partire dal valore $Y=1$, che è assegnato dalla istruzione 80; la istruzione 140 aumenta di una unità il valore di Y, con il solito impiego del simbolo «=» di cui abbiamo detto sopra.
Istr. 100,110,120 sono analoghe alle 120,130,140 del programma I.
Istr. 130. Arresta la procedura quando A è divisore del numero trovato. Se questo non è la Istr. 150 fa ricominciare la ricerca del divisore con il nuovo valore di Y.

PROGRAMMA III - Calcolo del valore della funzione di Eulero di un intero.

```
10 REM'EULER F(X)
20 INPUT "X=";X
30 Y=1
40 IF Y=X GOTO 140
50 M=X
60 N=Y
70 GOSUB 160
80 IF Z>1 GOTO 120
90 Y=Y+1
100 K=K+1
110 GOTO 40
120 Y=Y+1
130 GOTO 40
140 PRINT "EULER F("X")="K
150 END
160 P = M/N
170 Q = INT(P)
180 R = M - Q*N
190 IF R=0 GOTO 230
200 M=N
210 N=R
220 GOTO 160
230 Z=N
240 RETURN
```

COMMENTO. Avendo indicato con X un intero naturale, indichiamo qui con il simbolo $F(X)$ la funzione che fornisce il numero dei numeri naturali che sono minori di X e che hanno MCD con X uguale ad 1; in altre parole, il numero dei naturali minori di X e primi con X, compreso 1.
Come è noto, la funzione suddetta è stata introdotta da Eulero; essa può venir calcolata utilizzando certe formule che sfruttano la decomposizione di X in fattori primi.
Qui il calcolo viene eseguito con un procedimento diretto, passando in rivista tutti i numeri naturali, a partire da 1 fino ad $X-1$, calcolando il MCD di ciascuno di essi e di X, e tenendo il conto di quei numeri per i quali tale MCD vale 1.
Precisamente, chiamato Y un numero naturale minore di X, con le istruzioni 50,60,70 si rimanda il calcolo del MCD (X,Y) alla subroutine rappresentata dalle istruzioni da 160 a 240. Quindi l'istruzione 80 decide di fare aumentare di una unità il numero K, che indica il numero dei numeri Y primi con X, oppure di passare al numero successivo a seconda che sia MCD $(X,Y)=1$ oppure no. L'istruzione 40 fa terminare il calcolo quando Y ha raggiunto X.
Si può osservare che per passare in rivista tutti i numeri di un insieme esistono procedure più semplici e rapide di quella da noi qui adottata, procedure che sono esposte in tutti i buoni manuali di programmazione. Qui

abbiamo preferito utilizzare le istruzioni 80,90,120 per poter dar modo all'insegnante di valutare ogni singolo passo della soluzione del problema.
Inoltre si possono escogitare varie altre procedure più rapide per il calcolo della funzione di Eulero-Gauss; abbiamo scelto quella del programma III per dare un altro esempio di utilizzazione di un programma precedente come subroutine.

PROGRAMMA IV - Scrittura di un intero in forma binaria.

```
10 REM'BIN. SCRITTURA DI UN INTERO IN FORMA BINARIA.
20 INPUT "N=";N ' NUMERO DATO
30 W=N
40 Z=0
50 Y=0
60 C=N/2
70 IF C=0 GOTO 150
80 D= INT(C)
90 R=N-D*2 ' RESTO
100 Y = Y + R*10^Z
110 U = (N-R)/2
120 N=U
130 Z=Z+1
140 GOTO 60
150 PRINT "BIN("W")=" Y
160 END
```

COMMENTO. Il programma traduce il noto procedimento per cambiare la base di rappresentazione di un numero intero, nel caso particolare in cui la nuova base sia il numero 2; è noto che in questo caso ogni numero naturale può essere rappresentato con l'impiego di due soli simboli, per esempio «0» e «1». Le singole cifre della rappresentazione binaria si ottengono come resti di opportune successive divisioni per 2. La istruzione 100 costruisce il simbolo che rappresenta il numero in base 2 operando come se le cifre fossero quelle della rappresentazione in base 10; queste infatti sono le convenzioni di rappresentazione con le quali la macchina lavora.

PROGRAMMA IV bis - Il passaggio dalla scrittura di un intero naturale in forma binaria alla forma abituale con l'impiego delle 10 cifre abituali può essere occasione di ulteriori riflessioni, analoghe a quelle già fatte. Il risultato può essere raggiunto con il seguente programma denominato INVBIN:

```
99 REM'INVBIN
100 INPUT "S=";S
110 W=S
120 N=0
130 IF 10^N>W GOTO 210
140 A=S/10
150 B = INT(A)
160 C = 10*B
170 D=S-C
180 Y = Y+D*2^N
190 S=B
195 N=N+1
200 GOTO 130
210 PRINT "INVBIN("W") = "Y""
220 END
```

COMMENTO. Si possono ribadire qui alcune osservazioni già fatte in precedenza:
Istr. 110. Il simbolo *S*, costituito da una successione di simboli «1» e «0», viene introdotto in una seconda memoria, perché, durante il calcolo, esso sarà cambiato.
Istr. da 140 a 170. Il simbolo *S* viene trattato come se fosse quello di un numero rappresentato nella forma decimale abituale. Le istruzioni hanno lo scopo di isolare e mettere in evidenza le singole cifre del simbolo *S*, partendo da destra.
Istr. 180. Nella memoria *Y* viene introdotto il numero che si ottiene esplicitando la definizione delle convenzioni di rappresentazione degli interi naturali con le cifre abituali.
Istr. da 190 a 200. Il nuovo simbolo ottenuto dalle operazioni precedenti, viene introdotto nel procedimento.
La costruzione del programma per rappresentare un numero dato in una base qualunque, minore di 10, costituisce un ulteriore facile esercizio.

3 - Nei paragrafi precedenti abbiamo dato qualche spunto didattico per operare su numeri interi con le macchine programmabili. Daremo ora qualche esempio semplicissimo di impiego delle procedure di programmazione per la risoluzione di problemi che riguardano numeri razionali e valori approssimati di grandezze.
Esporremo soltanto pochi esempi che riteniamo significativi per ribadire ciò che abbiamo già esposto ripetutamente, cioè per utilizzare queste macchine in modo creativo e ragionevole, e per ottenere informazioni attendibili; e quindi per poter ampliare l'immagine tradizionale che si ha della matematica.
Il primo caso che ci interessa presentare è quello della soluzione numerica delle equazioni in una incognita. A questo proposito vi è la diffusa convinzione che la soluzione di un'equazione cosiffatta consista essenzialmente nell'utilizzazione di una formula; e conseguentemente è anche diffusa la convinzione che esistano delle equazioni che non sono risolubili, intendendo indicare così delle equazioni per le quali non si conoscono formule risolutive, oppure per le quali tali formule sono di difficile applicazione, come avviene per le equazioni di terzo e quarto grado. Se invece si adotta l'idea che la matematica è principalmente una scienza di procedure razionali l'insegnamento potrà essere indirizzato verso la ricerca di procedure cosiffatte; ricerca che può essere resa facile dall'impiego intelligente delle macchine, le quali risparmiano la fatica di calcoli gravosi e numerosi, e quindi rendono possibile l'adozione di procedure che prima non erano applicabili.
Un esempio interessante di queste circostanze è fornito dalla ricerca della approssimazione della radice di un'equazione mediante successivi dimezzamenti dell'intervallo al quale essa radice appartiene.
Precisamente, supponiamo che sia:

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

l'equazione data; faremo l'ipotesi che la funzione f sia continua in un intervallo dato da limitazioni del tipo:

$$A < X < B. \tag{5}$$

e supporremo inoltre di aver accertato che nell'intervallo (5) l'equazione (4) ha una sola radice, e di conseguenza che la funzione f acquista valori di segno contrario nei due estremi dell'intervallo.
In queste ipotesi la ricerca razionale di nuove informazioni, che migliorino quelle date dalle (5), può essere eseguita dimezzando l'intervallo rappresentato da queste diseguaglianze; ovviamente, in forza delle ipotesi ammesse, in uno solo dei due intervalli parziali la equazione (4) avrà la sua radice; e questo intervallo sarà assunto come nuovo intervallo in cui si eseguirà la ricerca. L'operazione potrà essere ripetuta, fino a trovare un intervallo la cui lunghezza sia soddisfacentemente piccola, nel quale si trova la radice.
Questa procedura, ripetiamo, sarebbe troppo gravosa se eseguita manualmente ed è resa possibile dall'impiego di macchine programmabili.

PROGRAMMA V - Approssimazione della radice di un'equazione per dimezzamento successivo degli intervalli.

```
10 REM'DIMEZZAMENTO DI INTERVALLO. NOME : DIM4
20 INPUT"A=";A
30 INPUT"B=";B'ESTREMI INTERVALLO: A<B
40 INPUT"N=";N' ERRORE AMMESSO 10∧(-N)
50 IF B-A<10∧(-N) GOTO 170
60 X=A
70 GOSUB 190
80 P=F
90 X=(A+B)/2
100 GOSUB 190
110 Q=F
120 IF P*Q <0 GOTO 150
130 A=(A+B)/2
140 GOTO 50
150 B=(A+B)/2
160 GOTO 50
170 PRINT""A" < X < "B""
180 END
190 F=X∧3 - X∧2 - 1
200 RETURN
```

COMMENTO. Istr. 40. Si introduce l'ampiezza dell'intervallo nell'interno del quale si dovrà trovare la radice. Ovviamente tale ampiezza darà la misura dell'errore che si commette nella determinazione della radice stessa.
Istr. da 60 ad 80. Si calcola il valore della funzione nell'estremo *A* dell'intervallo, e si introduce tale valore nella memoria *P*.
Istr. da 90 a 110. Si calcola il valore della funzione nel punto $(A+B)/2$, medio dell'intervallo di estremi *A* e *B*, e si introduce tale valore nella memoria Q.
Istr. 120. Si determina il segno del prodotto: si può così decidere se la radice sta nella metà sinistra dell'intervallo dato, oppure nell'altra metà. Nel secondo caso si sposta l'estremo *A* nel punto medio dell'intervallo (Istr. 130); nel primo caso si sposta in quel punto il punto *B* (Istr. 150).
Istr. 170. Viene visualizzato l'intervallo entro il quale si trova la radice quando tale intervallo ha una lunghezza minore di $10\wedge(-N)$.
Istr. 190. La subroutine calcola il valore della funzione nei punti che si scelgono. Nell'esempio allegato la funzione è

$$X^3 - X^2 - 1$$

e una radice appartiene all'intervallo:

$$1,465568 < X < 1,465576.$$

PROGRAMMA VI - Sistemi di due equazioni lineari in due incognite.

```
99 REM'LIN . SISTEMI DI DUE EQUAZIONI LINEARI.
100 INPUT "B1=";B1
110 INPUT "B2=";B2
120 INPUT "B3=";B3 ' COEFFICIENTI DELLA PRIMA EQUAZIONE
130 INPUT "B4=";B4
140 INPUT "B5=";B5
150 INPUT "B6=";B6 ' COEFFICIENTI DELLA SECONDA EQUA-
    ZIONE.
160 W = B1*B5 - B2*B4
170 U = B2*B6 - B3*B5
180 V = B3*B4 - B1*B6
190 X = U/W
200 Y = V/W
210 PRINT "X="X , "Y="Y
220 END
```

La risoluzione di un sistema di due equazioni lineari in due incognite si può ottenere con un procedimento del tutto elementare, che è dato dal Programma VI. Qui le due equazioni in parola sono state scritte nella forma seguente:

$$(6)\quad \begin{cases} B1 * X + B2 * Y + B3 = 0 \\ B4 * X + B5 * Y + B6 = 0. \end{cases}$$

Nelle istruzioni da 160 a 200 si riconoscono facilmente le formule che danno la soluzione del sistema (6) con la procedura che viene abitualmente richiamata nei manuali con la espressione «Metodo di Cramer». Tale procedura è, ripetiamo, del tutto elementare, e non ha bisogno di ulteriori commenti.
Rimangono tuttavia i problemi riguardanti il significato e la portata dei risultati dei calcoli qualora i coefficienti *B1*...*B6* siano dei valori approssimati di numeri reali, per esempio dei valori troncati di tali numeri. Infatti in questo caso avrebbe senso richiedere di determinare due intervalli ai quali appartengono i valori delle incognite: invero dalle argomentazioni esposte sopra nel Cap. II discende che l'applicazione immediata ed acritica delle formule di Cramer non ci dà informazioni sufficienti in relazione al problema attuale.
Una delle strade che si potrebbero seguire per ottenere le informazioni desiderate sfrutta la possibilità di eseguire molti calcoli, che sarebbero troppo gravosi se fatti a mano. Infatti in questo caso, se i coefficienti delle equazioni (6) sono valori troncati di certi 6 numeri reali, si può pensare di eseguire i calcoli che portano alla ricerca della soluzione del sistema (6) stesso prendendo in tutti i modi possibili dei valori per difetto e per eccesso dei coefficienti. Si hanno quindi $2^6 = 64$ scelte, ognuna delle quali può dare luogo ad una soluzione, costituita da una coppia di valori *X,Y*.
Interpretando le equazioni (6) secondo le convenzioni della geometria analitica, le incognite *X* e *Y* possono essere considerate come le coordinate cartesiane di un punto del piano, ed ognuna delle equazioni può essere così interpretata come rappresentante una retta dello stesso piano. La soluzione del sistema (6) traduce allora la ricerca del punto comune alle due rette suddette.
IL PROGRAMMA VII allegato contiene la traduzione pratica delle considerazioni ora esposte.

```
10 REM'LIN3 . SISTEMI LINEARI 2*2 CON INTV.
20 INPUT "B1=";B1 ' COEFFICIENTI PRIMA EQUAZIONE
30 INPUT"B2=";B2
40 INPUT "B3=";B3
50 INPUT"B4=";B4 ' COEFFICIENTI SECONDA EQUAZIONE
60 INPUT"B5=";B5
70 INPUT"B6=";B6
80 INPUT"E=";E ' ERRORE NEI DATI
90 H1 =1
100 IF H1 > 64 GOTO 620
110 M1 = H1
120 N=1
130 IF N>6 GOTO 390
140 GOSUB 650
150 IF N=1 GOTO 210
160 IF N=2 GOTO 240
170 IF N=3 GOTO 270
180 IF N=4 GOTO 300
190 IF N=5 GOTO 330
200 IF N=6 GOTO 360
210 A1= B1+E*M4
220 N=N+1
230 GOTO 130
240 A2=B2+E*M4
250 N=N+1
260 GOTO 130
270 A3=B3+E*M4
280 N=N+1
290 GOTO 130
300 A4=B4+E*M4
310 N=N+1
```

```
320 GOTO 130
330 A5=B5+E*M4
340 N=N+1
350 GOTO 130
360 A6=B6+E*M4
370 N=N+1
380 GOTO 130
390 W=A1*A5-A2*A4
400 U=A2*A6-A3*A5
410 V=A3*A4-A1*A6
420 Z1= U/W
430 Z2=V/W
440 X1=Z1
450 IF H1>1 GOTO 480
460 X5=X1
470 X6=X1
480 IF X5< X1 GOTO 500
490 X5=X1
500 IF X6>X1 GOTO 520
510 X6=X1
520 Y1=Z2
530 IF H1 ≥1 GOTO 560
540 Y5=Y1
550 Y6=Y1
560 IF Y5<Y1 GOTO 580
570 Y5=Y1
580 IF Y6>Y1 GOTO 600
590 Y6=Y1
600 H1=H1+1
610 GOTO 100
620 PRINT X5 "< X < " X6
630 PRINT Y5 "< Y < " Y6
640 END
650 M2=M1/2
660 M3=INT(M2)
670 M4=M1-2*M3
680 M5=M1-M4
690 M6=M5/2
700 M1=M6
710 RETURN
```

Nelle istruzioni da 390 a 410 si riconoscono i calcoli già esposti nel programma VI, per ricercare il punto comune alle due rette.
L'enumerazione di tutti i casi possibili viene fatta con la seguente procedura: si osserva che la rappresentazione degli interi da 0 a 63 in base 2 richiede al massimo 6 cifre, 0 oppure 1; pertanto, quando sia data la rappresentazione binaria di un numero cosiffatto, le cifre di tale rappresentazione possono rappresentare convenzionalmente il fatto che del coefficiente corrispondente viene preso il valore per difetto oppure per eccesso. Praticamente le cifre 0 oppure 1 della rappresentazione binaria possono essere considerate come coefficienti degli incrementi che fanno passare ogni dato del problema (coefficiente del sistema (6)) dal valore per difetto al valore per eccesso.
Istr. da 20 a 70 introducono i dati, cioè i valori troncati dei coefficienti delle equazioni del sistema lineare (6).
Istr. 80. Dà l'errore con il quale sono assegnati i dati.
Istr. 90, 100. Il contatore $H1$ dà gli interi da 1 a 64. La subroutine da 650 a 700 dà la rappresentazione in base 2 di ciascuno dei numeri suddetti. Si riconosceranno le istruzioni dell'analogo programma IV.
Il contatore N dà il posto delle cifre della rappresentazione trovata, da destra a sinistra.
Istr. da 150 a 200. Rimandano alle istruzioni da 210 a 380, le quali costruiscono tutti i possibili valori, per difetto e per eccesso, dei dati.
Istr. da 440 a 590 costruiscono l'estremo inferiore e superiore del 64 valori delle incognite, forniti dalle procedure di calcolo espresse dalle istruzioni da 390 a 430.
L'applicazione del programma VII conferma le osservazioni fatte più volte, in relazione alle informazioni che si possono trarre dai calcoli su numeri reali. La cosa è resa evidente dalla trattazione di un esempio numerico concreto: siano per esempio dati i seguenti valori dei coefficienti del sistema (6):

$$B1 = 1,23;\quad B2 = 2,35;\quad B3 = 21,59$$
$$B4 = 3,24;\quad B5 = 3,12;\quad B6 = 41,52.$$

Applicando il programma VI, si ottiene la coppia di valori delle incognite:

$$(7)\qquad X = 8,000002;\ Y = 4,999999.$$

Utilizzando l'immagine geometrica di cui abbiamo detto sopra, si potrebbe dire che in questo caso l'applicazione del programma VI conduce alle coordinate di un unico punto. Con calcoli a mano si verifica immediatamente che tali coordinate sono:

$$(8)\qquad X = 8;\ Y = 5.$$

Di conseguenza i valori (7) discendono dagli arrotondamenti che la macchina esegue sui risultati dei calcoli che sta svolgendo.
L'applicazione del programma VII, con gli stessi dati e con l'ulteriore informazione:

$$(9)\qquad E = 0,01,$$

porta alla coppia di disequazioni:

$$(10)\qquad \begin{aligned} 7,913138 &< X < 8,11563 \\ 4,879923 &< Y < 5,045464. \end{aligned}$$

Sempre utilizzando l'immagine geometrica, si può dire che le disequazioni (10) rappresentano un rettangolo, con i lati paralleli agli assi, entro il quale può cadere il punto di intersezione delle rette rappresentate dalle (6). Si può inoltre osservare che, nell'ordine di approssimazione dei dati, le (10) forniscono molte informazioni che sono superflue; esse possono quindi essere sostituite dalle seguenti:

$$(11)\qquad \begin{aligned} 7,91 &< X < 8,12 \\ 4,87 &< X < 5,05. \end{aligned}$$

4 - Chiudiamo i brevi spunti didattici di calcolo con macchine programmabili con qualche esempio riguardante il problema classico della quadratura del cerchio. Come è noto, questo problema è strettamente collegato con quello della determinazione del rapporto tra la lunghezza della semicirconferenza e quella del raggio. In geometria euclidea tale rapporto è costante; esso viene abitualmente indicato con una lettera dell'alfabeto greco, e spesso viene anche chiamato «pigreco»; per comodità di scrittura noi indicheremo qui tale numero col simbolo P.
Si conoscono oggi milioni di cifre di questo numero, e molte notevolissime sue proprietà. Qui esporremo alcune procedure del tutto elementari per la determinazione di suoi valori approssimati, procedure che sono rese applicabili dalla possibilità di eseguire molti calcoli, che altrimenti sarebbero troppo gravosi.
Anzitutto cercheremo di valutare direttamente l'area del cerchio, o meglio del quarto di cerchio, utilizzando un procedimento che, a detta degli storici, è già stato utilizzato dagli antichi Egizi, ovviamente in forma meno precisa di quella che qui esporremo. Precisamente pare che gli Egiziani avessero diviso il raggio in 9 parti, inscrivendo quindi il quarto di cerchio in un quadrato suddiviso in 81 quadratini *(cfr. fig. 2)*. Essi poi stimarono, come suol dirsi ad occhio, che la superficie ricoperta dal quarto di cerchio fosse di 64 quadratini, compensando, sempre ad occhio, le parti dei quadratini che rimanevano all'interno di un dato quadratino

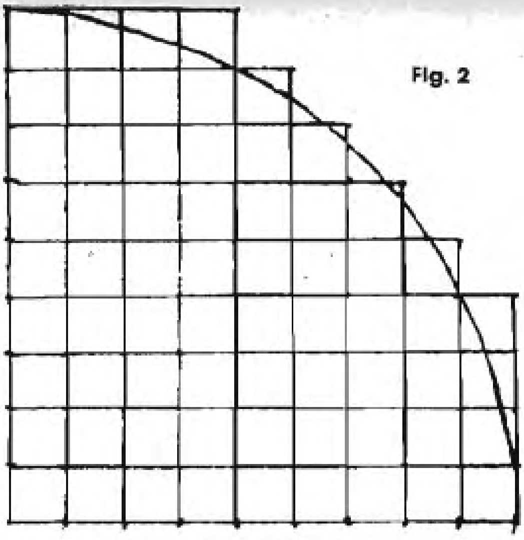


Fig. 2

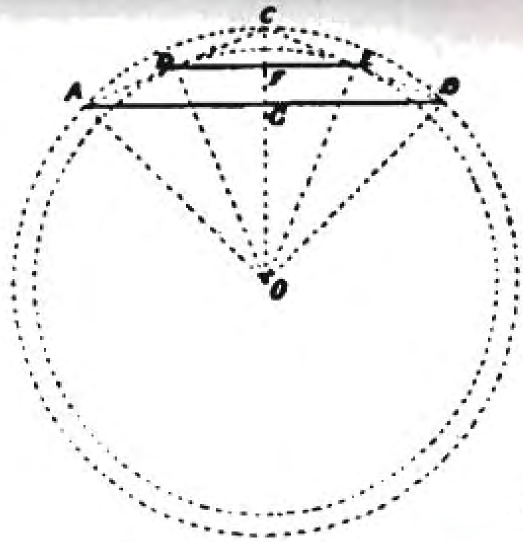


Fig. 3

con quelle che cadevano all'interno di un altro. Essi ottennero così una stima di P_i data da:

(1) $$P_i = 4 \times (8/9)^2 = 3{,}1604...$$

valore che differisce, per eccesso, dal valore di P_i per meno di 0,02.

Noi esporremo qui, per il calcolo di valori approssimati di P_i, una procedura che viene spesso chiamata «Metodo degli isoperimetri», e che alcuni storici attribuiscono al Cardinale Niccolò Da Cusa. Questa procedura mira a stimare il raggio di una circonferenza che abbia una lunghezza assegnata; e ciò fondandosi sulle relazioni che legano i raggi e gli apotemi di due poligoni regolari che hanno lo stesso perimetro, e l'uno dei quali abbia il numero di lati doppio dell'altro.

A questo proposito si dimostra facilmente che, dato un poligono regolare di n lati, inscritto in un cerchio di raggio r, ed indicato con a il suo apotema, il poligono regolare di $2n$ lati che ha lo stesso perimetro ha un apotema a' che è dato da:

(2) $$a' = (a+r)/2,$$

ed è inscritto in un cerchio il cui raggio r' è dato da:

(3) $$r' = \sqrt{ra'}.$$

Queste relazioni si fondano su considerazioni di geometria elementare, che il lettore potrà svolgere facilmente partendo dalla figura annessa; in questa si ha *(cfr. fig. 3)*:

(4) $$OC = r; \quad OG = a$$

ed AB è il lato del poligono di n lati. Inoltre si ha:

(5) $$OA = OB = OC = r;$$
$$AD = DC = CE = EB.$$

DE è il lato del poligono regolare di $2n$ lati che ha lo stesso perimetro di quello che ha come lato AB, ed è chiaramente:

(6) $$OD = r'; \quad OF = a'.$$

Il calcolo può ovviamente essere ripetuto partendo dai nuovi valori del raggio e dell'apotema.

L'annesso programma ripete il calcolo per un numero stabilito M di volte.

```
10 REM PIGR4
20 INPUT "M=";M
30 A=1
40 B=SQR (2)
50 N=1
60 IF N>M GOTO 130
70 C=(A+B)/2
80 D= SQR(B*C)
90 A=C
100 B=D
110 N=N+1
120 GOTO 60
130 PRINT 4/D "< Pi < " 4/C
140 END
```

I valori di partenza si riferiscono ad un quadrato circoscritto ad un cerchio di raggio unitario. Quindi il primo valore dell'apotema è 1, ed il primo valore del raggio è $\sqrt{2}$; il perimetro del poligono è ovviamente 8.

Il programma allegato non richiede commenti, e, per esempio, facendo $M = 15$ si ottiene:

(7) $$3{,}141592653 < P_i < 3{,}141592654.$$

I risultati dei calcoli vanno valutati tenendo conto del numero di cifre con cui lavora la macchina di cui si dispone, e tenendo anche conto degli eventuali arrotondamenti che la macchina esegue sui risultati.

Altri programmi potranno essere costruiti dagli insegnanti, per esempio calcolando direttamente dei valori approssimati dell'area del cerchio, seguendo le idee degli Egiziani che abbiamo esposto sopra, e profittando del fatto che le macchine permettono di eseguire moltissimi calcoli in un tempo breve, oppure sviluppando le idee di Archimede, idee che pure si basano su procedure di geometria elementare e conducono ad approssimare la lunghezza della circonferenza di dato raggio con i perimetri di una successione di poligoni regolari inscritti e circoscritti, raddoppiando ad ogni passo il numero dei lati del poligono considerato.

5 - Ciò che abbiamo esposto finora costituisce soltanto uno scarno insieme di spunti didattici, diretti a suggerire ai docenti un impiego intelligente ed autonomo dei nuovi strumenti di calcolo. Ripetiamo qui che a nostro parere ogni sforzo dovrebbe essere fatto per evitare che questo impiego diventi pretesto per pigrizia mentale e per dipendenza intellettuale, e per conferire invece all'insegnamento della matematica quella dimensione formativa che, a nostro parere, è il suo aspetto più importante **(Carlo Felice Manara,** Ordinario di Istituzioni di Geometria superiore, Università di Milano**).**